R

الترتيب و العمليات - حلول

تمرين 1

انتبه ← تعليق ←

معطيات : x و y عددان حقيقيان حيث: $x \le y$

① لنقارن $3x-7y$ و $-5y+x$

لدينا :

$(-5y+x)-(3x-7y) = -5y+x-3x+7y$

$= -2x+2y = 2(-x+y) = 2(y-x)$

و بما أن $x \le y$ فإن $x-y \le 0$ منه $2(x-y) \le 0$

بالتالي : $-5y+x \le 3x-7y$

② لنقارن $-\frac{2y+8x}{5}$ و $\frac{7x-11y}{2}$

لدينا :

$$\frac{7x-11y}{2}+\frac{2y+8x}{5}=\frac{5(7x-11y)+2(2y+8x)}{10}$$

$$=\frac{35x-55y+4y+16x}{10}=\frac{51x-51y}{10}=\frac{51(x-y)}{10}$$

و بما أن $x \le y$ فإن $x-y \le 0$ منه $\frac{51(x-y)}{2} \le 0$

بالتالي : $\frac{7x-11y}{2} \le -\frac{2y+8x}{5}$

تمرين 2

انتبه ← تعليق ←

معطيات	$3 \le x \le 6$	$-7 \le y \le -4$	$2 \le z \le 5$	$-10 \le t \le 1$	$-9 \le k \le -2$

لنؤطر $x+y$

لدينا : $3 \le x \le 6$ و $-7 \le y \le -4$

إذن : $-7+3 \le x+y \le -4+6$

إذن : $-4 \le x+y \le 2$

لنؤطر $x-y$

لدينا : $x-y = x+(-y)$

و لدينا $-7 \le y \le -4$ منه : $4 \le -y \le 7$

و لدينا : $3 \le x \le 6$

إذن : $3+4 \le x+(-y) \le 6+7$

بالتالي : $7 \le x-y \le 13$

لنؤطر $6t+2y$

لدينا $-10 \le t \le 1$ منه : $-60 \le 6t \le 6$

لدينا $-7 \le y \le -4$ منه : $-14 \le 2y \le -8$

إذن : $-60+(-14) \le 6t+2y \le 6+(-8)$

بالتالي : $-74 \le 6t+2y \le -2$

لنؤطر $z+t$

لدينا : $2 \le z \le 5$ و $-10 \le t \le 1$

إذن : $2+(-10) \le z+t \le 5+1$

إذن : $-8 \le z+t \le 6$

لنؤطر $z-x$

لدينا : $z-x = z+(-x)$

و لدينا $3 \le x \le 6$ منه : $-6 \le -x \le -3$

و لدينا : $2 \le z \le 5$

إذن : $2+(-6) \le z+(-x) \le 5+(-3)$

بالتالي : $-4 \le z-x \le 2$

لنؤطر $-y+5x$

لدينا $-7 \le y \le -4$ منه : $4 \le -y \le 7$

لدينا $3 \le x \le 6$ منه : $15 \le 5x \le 30$

إذن : $4+15 \le -y+5x \le 7+30$

بالتالي : $19 \le -y+5x \le 37$

لنؤطر $5x$

لدينا $3 \le x \le 6$ منه : $15 \le 5x \le 30$

لنؤطر $-6y$

لدينا $-7 \le y \le -4$ منه : $24 \le -6y \le 42$

انتبه ← لانستطيع التأطير مباشرة لأنه لاتوجد قاعدة تسمح بتأطير الفرق

لنؤطر $-4y-16$

لدينا : $-4y-16 = -4y+(-16)$

لدينا $-7 \le y \le -4$ منه : $16 \le -4y \le 28$

منه: $16+(-16) \le -4y+(-16) \le 28+(-16)$

بالتالي : $0 \le -4y-16 \le 12$

لنؤطر $10y$

لدينا $-7 \le y \le -4$ منه : $-70 \le 10y \le -40$

لنؤطر x^2

لدينا $3 \le x \le 6$ منه : $9 \le x^2 \le 36$

لنؤطر $-4t$

لدينا $-10 \le t \le 1$ منه : $-4 \le -4t \le 40$

لنؤطر y^2

لدينا $-7 \le y \le -4$ منه : $4 \le -y \le 7$

منه : $16 \le (-y)^2 \le 49$

بالتالي : $16 \le y^2 \le 49$

تعليق ← لانستطيع تأطير y^2 مباشرة لأن المتفاوتة $-7 \le y \le -4$ تحتوي على أعداد سالبة، لذلك نؤطر $-y$ فنحصل على متفاوتة كل أطرافها موجبة، ثم نؤطر $(-y)^2$ ، ثم نستعمل الخاصية: $(-y)^2 = y^2$

لنؤطر $x+y-t+6z+13$

لدينا :

$x+y-t+6z+13 = x+y+(-t)+6z+13$

لدينا : $3 \le x \le 6$

و : $-7 \le y \le -4$

و لدينا: $-10 \le t \le 1$ منه : $-1 \le -t \le 10$

و لدينا: $2 \le z \le 5$ منه : $12 \le 6z \le 30$

نجمع المتفاوتات فنجد :

$20 \le x+y+(-t)+6z+13 \le 55$

انتبه ← تذكر أنه عندما نضرب متفاوتة في عدد سالب فإننا نغير ترتيب الأطراف.

R

تمرين 2

انتبه ←   تعليق ←

لنؤطر t^2

لدينا $-10 \le t \le 1$ منه :

$0 \le t \le 1$ أو $-10 \le t \le 0$

$0 \le t \le 1$ أو $0 \le -t \le 10$

منه $0 \le t^2 \le 1$ أو $0 \le (-t)^2 \le 100$

منه $0 \le t^2 \le 1$ أو $0 \le t^2 \le 100$

بالتالي: $0 \le t^2 \le 100$

← صعوبة هذا التأطير تكمن في كون العدد t مؤطر بين عدد سالب و آخر موجب ، مما يعيق استعمال قاعدة تأطير المربع مباشرة أو حتى تأطير $-t$ ، لذلك نستعمل الحالات : فنؤطر t في الحالة الموجبة ثم في الحالة السالبة ثم نستنتج التأطير من النتائج المحصل عليها.

← تذكر أننا نؤطر مستعملين قواعد التأطير و ليس بتطبيق تعبير المجهول على الأعداد.

لنؤطر $\frac{x-t}{y+10z}$

لدينا : $\frac{x-t}{y+10z} = (x+(-t))\times\frac{1}{y+10z}$

لدينا : $-10 \le t \le 1$ منه : $-1 \le -t \le 10$

و لدينا : $3 \le x \le 6$

إذن : $2 \le x+(-t) \le 16$

لدينا : $2 \le z \le 5$ منه: $20 \le 10z \le 50$

و لدينا : $-7 \le y \le -4$

إذن : $13 \le y+10z \le 46$

إذن : $\frac{1}{46} \le \frac{1}{y+10z} \le \frac{1}{13}$

منه :

$2\times\frac{1}{46} \le (x+(-t))\times\frac{1}{y+10z} \le 16\times\frac{1}{13}$

بالتالي : $\frac{1}{23} \le \frac{x-t}{y+10z} \le \frac{16}{13}$

← لاحظ أن التعابير الأخيرة مركبة لذلك فتأطيرها يتطلب كتابتها على شكل جذاءات و مجاميع قصد التمكن من تطبيق قواعد الترتيب.

لنؤطر xz

لدينا : $3 \le x \le 6$ و $2 \le z \le 5$

منه : $6 \le xz \le 30$

لنؤطر xy

لدينا : $-9 \le k \le -2$ و $-7 \le y \le -4$

منه : $2 \le -k \le 9$ و $4 \le -y \le 7$

منه : $4\times 2 \le (-y)\times(-k) \le 7\times 9$

بالتالي : $8 \le yk \le 63$

← لاحظ أننا استعملنا نفس تقنية تأطير xy ، لكننا استفدنا من كون : $(-x)\times(-y) = xy$

لنؤطر $\frac{z}{x}$

لدينا : $\frac{z}{x} = z\times\frac{1}{x}$

لدينا : $3 \le x \le 6$ منه : $\frac{1}{6} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{3}$

و لدينا : $2 \le z \le 5$

منه : $2\times\frac{1}{6} \le z\times\frac{1}{x} \le 5\times\frac{1}{3}$

بالتالي : $\frac{2}{6} \le \frac{z}{x} \le \frac{5}{3}$ أو أيضا : $\frac{1}{3} \le \frac{z}{x} \le \frac{5}{3}$

لنؤطر $\frac{y^2+5}{t-10}$

لدينا : $\frac{y^2+5}{t-10} = (y^2+5)\times\frac{1}{t+(-10)}$

لدينا : $-7 \le y \le -4$ منه : $4 \le -y \le 7$

منه : $16 \le (-y)^2 \le 49$ أي: $16 \le y^2 \le 49$

منه : $21 \le y^2+5 \le 54$

لدينا : $-10 \le t \le 1$ منه :

$-20 \le t-10 \le -9$

منه : $9 \le -(t-10) \le 20$

منه : $\frac{1}{20} \le \frac{1}{-(t-10)} \le \frac{1}{9}$

إذن :

$21\times\frac{1}{20} \le (y^2+5)\times\frac{1}{-(t-10)} \le 54\times\frac{1}{9}$

أي : $\frac{21}{20} \le \frac{-(y^2+5)}{t-10} \le 6$

بالتالي : $-6 \le \frac{(y^2+5)}{t-10} \le -\frac{21}{20}$

لنؤطر yk

لدينا : $3 \le x \le 6$ و $-7 \le y \le -4$

منه : $4 \le -y \le 7$

منه : $3\times 4 \le x\times(-y) \le 6\times 7$

منه : $12 \le -xy \le 42$

بالتالي : $-42 \le xy \le -12$

← بما أن قاعدة تأطير جذاء تستوجب أن تكون كل الأعداد موجبة ، فإننا اعتمدنا التقنية التالية : أطرنا $-y$ فتصبح أطراف المتفاوتة $4 \le -y \le 7$ كلها موجبة (حتى $-y$ لأن y سالب)، مما سمح لنا بتأطير الجذاء $-xy$ ، و باستعمال قاعدة تأطير المقابل نستطيع تأطير xy.

لنؤطر $\frac{y}{z}$

لدينا : $\frac{y}{z} = y\times\frac{1}{z}$

لدينا : $-7 \le y \le -4$ منه : $4 \le -y \le 7$

و لدينا: $2 \le z \le 5$

منه : $\frac{1}{5} \le \frac{1}{z} \le \frac{1}{2}$

منه : $4\times\frac{1}{5} \le (-y)\times\frac{1}{z} \le 7\times\frac{1}{2}$

أي : $\frac{4}{5} \le \frac{-y}{z} \le \frac{7}{2}$

بالتالي : $\frac{-7}{2} \le \frac{y}{z} \le \frac{-4}{5}$

تمرين 3

انتبه ← تعليق ←

لنقارن $3\sqrt{5}$ و $\sqrt{37}$	لنقارن $-\sqrt{3}$ و $-2\sqrt{10}$	لنقارن $\sqrt{5}$ و $\sqrt{2}+\sqrt{3}$
لدينا : $(\sqrt{37})^2=37$ و $(3\sqrt{5})^2=9\times5=45$ بما أن : $45>37$ فإن : $3\sqrt{5}>\sqrt{37}$	لدينا : $(\sqrt{3})^2=3$ و $(2\sqrt{10})^2=4\times10=40$ بما أن : $40>3$ فإن : $2\sqrt{10}>\sqrt{3}$ بالتالي : $-2\sqrt{10}<-\sqrt{3}$	لدينا : $(\sqrt{5})^2=5$ و $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2$ $=2+2\sqrt{6}+3=5+2\sqrt{6}$ بما أن : $5+2\sqrt{6}>5$ فإن : $\sqrt{2}+\sqrt{3}>\sqrt{5}$
لنقارن $\sqrt{5}-\sqrt{40}$ و $\sqrt{17}-\sqrt{11}$	← لاحظ أن العددان سالبان لذلك قارنا مقابليهما قبل مقارنتهما.	**لنقارن $6+\sqrt{3}$ و $6+\sqrt{5}$**
لدينا $\sqrt{5}<\sqrt{40}$ منه $\sqrt{5}-\sqrt{40}<0$ لدينا $\sqrt{17}>\sqrt{11}$ منه $\sqrt{17}-\sqrt{11}>0$ بالتالي : $\sqrt{5}-\sqrt{40}<\sqrt{17}-\sqrt{11}$		لدينا $\sqrt{5}>\sqrt{3}$ منه : $6+\sqrt{5}>6+\sqrt{3}$
لنقارن $3+\sqrt{3}$ و $\sqrt{27}+1$	**لنقارن $-7\sqrt{14}$ و $20\sqrt{2}$**	← لم نقارن المربعين و اكتفينا بمقارنة $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ لوجود العدد 6 في كلتا العددين.
لدينا : $(3+\sqrt{3})^2=3^2+2\times3\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2$ $=9+6\sqrt{3}+3=12+6\sqrt{3}$ و $(\sqrt{27}+1)^2=(\sqrt{27})^2+2\times\sqrt{27}\times1+1^2$ $=27+2\sqrt{9\times3}+1=28+6\sqrt{3}$ بما أن : $12+6\sqrt{3}<28+6\sqrt{3}$ فإن : $3+\sqrt{3}<\sqrt{27}+1$	لدينا : $-7\sqrt{14}<0$ و $20\sqrt{2}>0$ منه : $20\sqrt{2}>-7\sqrt{14}$ ← العدد الموجب أكبر من العدد السالب، لذلك لا نقارن المربعات	

تمرين 4

انتبه ← تعليق ←

معطيات : $1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42$ و $2{,}23<\sqrt{5}<2{,}24$

① لنؤطر $A=5\sqrt{2}+3\sqrt{5}$	② لنؤطر $B=\frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$
لدينا : $1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42$ منه $7{,}05<5\sqrt{2}<7{,}1$ و لدينا : $2{,}23<\sqrt{5}<2{,}24$ منه $4{,}46<2\sqrt{5}<4{,}48$ بالتالي : $11{,}51<5\sqrt{2}+3\sqrt{5}<11{,}58$ أي : $11{,}51<A<11{,}58$	لنبسط B أولا: $B=\frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{(5+\sqrt{5})\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}+5}{5}=\frac{5(\sqrt{5}+1)}{5}=\sqrt{5}+1$ لدينا: $2{,}23<\sqrt{5}<2{,}24$ منه : $3{,}23<\sqrt{5}+1<3{,}24$ بالتالي : $3{,}23<B<3{,}24$